Reptes

Problemes

Juanjo Rué, UPC
Óscar Rivero, Universitat de Warwick

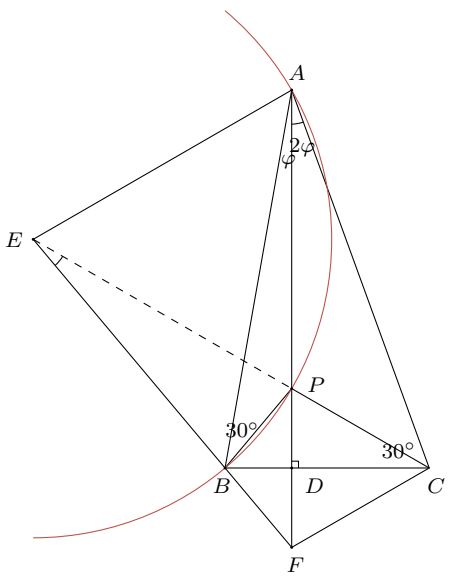
Arriba un nou número de la *SCM/Notícies* (malgrat que la covid-19 encara circula, però, això sí, ja amb una vacuna i amb esperances que les coses es posin a lloc ben aviat) i, amb ell una nova remesa de problemes. Però, amb un petit canvi: canviem de responsable de la secció. Després de gairebé quatre anys en Juanjo deixa d'encarregar-se de proposar problemes i recopilar solucions, i passa el testimoni a l'Óscar. Des d'aquí, en Juanjo dona les gràcies a la redacció de la *SCM/Notícies* i desitja molts encerts (especialment en la tria dels problemes!) a l'Óscar.

Però ara anem per feina, i en particular al que conté aquest número. De nou, l'habitual: quatre problemes per resoldre, dos dels quals de geometria (gràcies als nostres col·laboradors habituals Miquel Amengual i Joaquim Nadal), una desigualtat aritmètica (amb el col·laborador incansable Jose-Luis Díaz Barrero) i, finalment, una equació funcional per part de la redacció. Pel que fa a les solucions dels problemes, hem rebut solucions de Miquel Amengual, Joaquim Nadal, Pere Martínez, Juan Monterde i Bruno Salgueiro. Els agraïm a tots la dedicació i les boniques solucions. En publiquem una selecció.

Ja per acabar, el preàmbul habitual: les solucions i les propostes de problemes s'han d'enviar preferiblement en TEX o LATEX. Cal adjuntar els dibuixos corresponents en un format que sigui editable, per poder maquetar els fitxers amb rapidesa i eficàcia, gràcies! Les solucions i propostes de problemes, envieu-les a `riverosalgado@gmail.com`.

Problemes proposats

A169. (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)



Sigui ABC un triangle acutangle, designem per D el peu de la perpendicular tirada des de A a BC. Sigui P un punt del segment AD tal que $\angle ABP = \angle PCB = 30°$ i $\angle PAC = 2 \cdot (\angle PAB)$.

Determinau el valor de $\angle BAP$.

A170. (Proposat per Jose-Luis Díaz Barrero, UPC, Barcelona.)

Siguin a, b, c tres nombres reals positius. Proveu que la següent desigualtat és certa:

$$\frac{a^5 - b^5}{a^3b^3} + \frac{b^5 - c^5}{b^3c^3} + \frac{c^5 - a^5}{c^3a^3} \geq 0.$$

A171. (Proposat per la redacció.)

Sigui $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funció bijectiva. Demostreu que existeixen tres nombres $a < b < c$ que compleixen que $f(a) + f(b) = 2f(c)$.

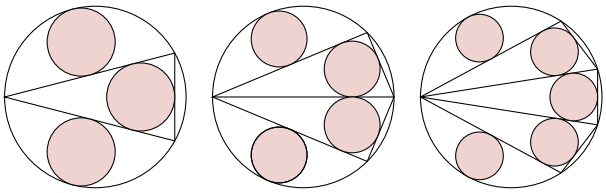
A172. (Proposat per Joaquim Nadal i Vidal. Llagostera, Girona.)

En una circumferència de radi 1 inscrivim un hexàgon ABCDEF amb tres costats alterns (per exemple $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ i $\overline{EF}$) de longitud 1 i els altres tres de longituds arbitràries. Demostreu que els punts mitjans dels costats arbitraris determinen un triangle equilàter.

Solucions

A165. (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)

A cada una de les figures següents,[11] on R designarà el radi de la circumferència gran i r el radi de cada una de les circumferències petites, determinau el valor de r en funció de R.



Solució: (Solució del proponent.)

En relació amb les configuracions proposades, la proposició següent resulta útil.

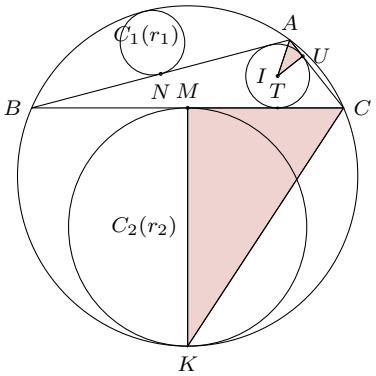
Proposició. Sigui ABC un triangle inscrit en una circumferència O de radi R i circumscrit a una circunferència de centre I i radi r.
Sigui C_1 una circumferència de radi r_1 tangent al costat AB en el seu punt mitjà i tangent interiorment a la circumferència O.
Sigui C_2 circumferència de radi r_2 tangent al costat BC en el seu punt mitjà i tangent interiorment a la circumferència O.

Llavors es compleix:

$$R = \frac{8r_1r_2\left(r + 2r_1 + 2r_2\right)}{16r_1r_2 - r^2}.$$

Prova. Sigui M el punt mitjà del costat BC i T, U els respectius punts de tangència de la circumferència $I\left(r\right)$ amb BC, CA.

Posem $t = \overline{AU}$, $p = \overline{BT}$ i $q = \overline{CT}$. Aleshores, $t = s - a$, $p = s - b$ y $q = s - c$, essent s el semiperímetre de $\triangle ABC$.



Atès que els triangles ombrejats són semblants, ja que tots dos són rectangles i $\angle UAI = \frac{1}{2}\angle CAB = \frac{1}{2}$ (arc BC què no conté A) $= \angle KCB = \angle KCM$, es té $\frac{r}{t} = \frac{2r_2}{\frac{a}{2}}$ i conseqüentment

$$\begin{aligned} pq = \left(s-b\right)\left(s-c\right) &= \frac{r^2 s}{s-a} \\ &= r^2 + \frac{ar^2}{s-a} = r^2 + ar\cdot\frac{r}{t} = r^2 + 4rr_2. \end{aligned}$$

Anàlogament, $pt = r^2 + 4rr_1$. D'altra banda, tenim que $r^2 s = r^2\left[(s-a)+(s-b)+(s-c)\right]$, que és igual a $r^2\left(p+q+t\right)$,
i també $r^2 s = \left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right) = pqt$.
Per tant, $r^2\left(p+q+t\right) = pqt$.

Aquesta igualtat, multiplicada per p, esdevé $r^2\left(p^2+pq+pt\right) = pq\cdot pt$. Substituint aquí pq i pt per les expressions obtingudes, s'obté que $r^2\left(p^2+r^2+4rr_2+r^2+4rr_1\right)$ és igual a $(r^2+4rr_2)(r^2+4rr_1)$ i $p^2 = 16r_1r_2 - r^2$, d'on deduïm que

$$\begin{aligned} a &= \overline{BC} = p+q = p + \tfrac{pq}{p} \\ &= p + \tfrac{r^2+4rr_2}{p} = \tfrac{4r_2(r+4r_1)}{p}. \end{aligned}$$

Al seu torn, pel teorema de la potència d'un punt, M, respecte d'una circumferència

$$\left(\frac{\overline{BC}}{2}\right)^2 = 2r_2\left(2R - 2r_2\right).$$

D'aquí aïllem $R = \frac{a^2}{16r_2} + r_2$.
I basta substituir a pel valor trobat abans per

[11] A cada esquema, la circumferència gran circumscriu els triangles que hi figuren, cada un dels quals amb la seva circumferència inscrita. Les circumferències petites restants són inscrites en sengles segments circulars i tangents en els punts mitjans de les cordes respectives.

obtenir l'expressió volguda:

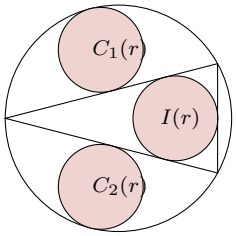
$$\begin{aligned} R &= \frac{\left(\frac{4r_2(r_1+4r_1)}{p}\right)^2}{16r_2} + r_2 = r_2\frac{(r+4r_1)^2+p^2}{p^2} \\ &= r_2\frac{r^2+8rr_1+16r_1^2+\left(16r_1r_2-r^2\right)}{16r_1r_2-r^2} \\ &= \frac{8r_1r_2(r+2r_1+2r_2)}{16r_1r_2-r^2}. \end{aligned}$$

Passem ara a les tres configuracions donades a l'enunciat del problema.

Apliquem la proposició a la primera configuració amb $r = r_1 = r_2$. Llavors,

$$R = \frac{8r_1r_2\,(r+2r_1+2r_2)}{16r_1r_2-r^2} = \frac{8r^2\cdot 5r}{16r^2-r^2}.$$

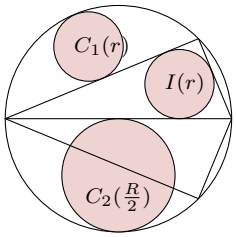
És a dir, $r = \dfrac{3}{8}R$.



De la proposició aplicada a la segona configuració amb $r_1 = r$ i $r_2 = \frac{R}{2}$, se'n dedueix que

$$R = \frac{4Rr\,(R+3r)}{8Rr-r^2}.$$

D'aquí podem aïllar $r = \dfrac{4}{13}R$.



Pel que fa a la darrera configuració, fem servir la proposició dues vegades. Aplicada amb $r_1 = r$ i $r_2 = x$, es té

$$R = \frac{8rx\,(x+2r+2x)}{16rx-r^2} = \frac{8x\,(3r+2x)}{16x-r},$$

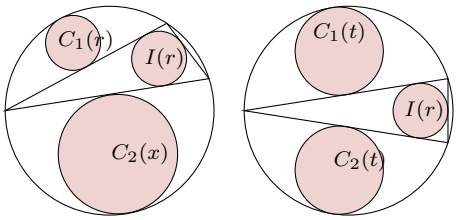
que escrivim, de manera equivalent:

$$16Rx - Rr - 24rx = 16x^2. \qquad (1)$$

I aplicada amb $r_1 = r_2 = t$ s'obté

$$R = \frac{8t^2\,(r+4t)}{16t^2-r^2} = \frac{8t^2}{4t-r}.$$

És a dir: $(4t-r)\,R = 8t^2$



Atès que $2t + 2r = 2R$, serà $t = R - x$. Substituint aquest valor de t, s'obté l'expressió $4R^2 - 12Rx + 8x^2 + Rr = 0$.

Tenint present (1), la darrera igualtat és

$$4R^2 - 12Rx + \frac{16Rx - Rr - 24rx}{2} + Rr = 0,$$

d'on deduïm que $x = \dfrac{R\,(8R+r)}{8\,(R+3r)}$.
Substituint aquest valor de x a (1) s'obté

$$16\left(\tfrac{R(8R+r)}{8(R+3r)}\right)^2 + 8\,(3r-2R)\,\tfrac{R(8R+r)}{8(R+3r)} + Rr = 0,$$

que escrivim com una cúbica en r,

$$Rr\left(72r^2 + 301Rr - 84R^2\right) = 0,$$

l'única solució vàlida de la qual és

$$r = \frac{\sqrt{114793}-301}{144}R.$$

Nota. La tercera configuració de l'enunciat apareix, amb el número 1.5.1, com a problema proposat, no resolt, en el llibre *Japanese temple geometry problems*, de H. Fukagawa i D. Pedoe (Winnipeg, Canadà, 1989). A la pàgina 87 s'hi pot trobar l'expressió de r en funció de R.

La proposició que he fet servir la vaig rebre del mateix Hidetoshi Fukagawa, autor del llibre, en una visita seva a Cala Figuera.

A166. (Proposat per la redacció.)

Sigui $n \geq 2$ un nombre enter. Per un subconjunt S no buit de $[n] = \{1,\ldots,n\}$, denotem per $\mathbb{E}[|S|] = \frac{1}{|S|}\sum_{s\in S} s$ (i.e., el valor promig dels elements de S). Sigui T_n el nombre de subconjunts no buits de $[n]$ pels quals $\mathbb{E}[|S|]$ és un nombre enter, demostreu que $T_n - n$ és parell.

Solució: (Solució de Juan Monterde, Universitat de València.)

Siga A_n la família de subconjunts no buits de $[n]$ pels quals $\mathbb{E}[|S|]$ és un nombre enter. Dividim A_n en

$$B_n = \{S \in A_n \text{ tal que } \mathbb{E}[|\mathrm{S}|] \in \mathrm{S}\}$$

$$C_n = \{S \in A_n \text{ tal que } \mathbb{E}[|\mathrm{S}|] \notin \mathrm{S}\}.$$

En B_n estan els conjunts monoelementals $\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}$. És clar a més que $A_n = B_n \cup C_n$ i que $B_n \cap C_n = \emptyset$.

Definim ara l'aplicació $F : C_n \to B_n$ per

$$F(S) = S \cup \{\mathbb{E}[|S|]\}.$$

Si afegim a S el seu valor mitjà, llavors el valor mitjà no varia:

$$\mathbb{E}[|S \cup \{\mathbb{E}[|S|]\}|] = \mathbb{E}[|S|].$$

Per tant, si $S \in C_n$, llavors $F(S) \in B_n$.

L'aplicació F és injectiva. Si $F(S_1) = F(S_2)$ amb $S_1, S_2 \in C_n$, aleshores

$$S_1 \cup \{\mathbb{E}[|S_1|]\} = S_2 \cup \{\mathbb{E}[|S_2|]\}.$$

Aquests dos conjunts han de tenir el mateix valor mitjà:

$$\mathbb{E}[|S_1 \cup \{\mathbb{E}[|S_1|]\}|] = \mathbb{E}[|S_2 \cup \{\mathbb{E}[|S_2|]\}|].$$

Per tant $\mathbb{E}[|S_1|] = \mathbb{E}[|S_2|]$ i així $S_1 = S_2$.

El conjunt imatge de F, $F(C_n)$, és tot B_n tret dels conjunts monoelementals. En efecte, si $S \in B_n$ no és monoelemental, aleshores $\mathbb{E}[|S|] \in S$. Considerem el subjunt $S - \{\mathbb{E}[|S|]\}$, que és no buit perquè S tenia almenys dos elements. El valor mitjà de $S - \{\mathbb{E}[|S|]\}$ és el mateix que el valor mitjà de S. Aquest valor no pertany a $S - \{\mathbb{E}[|S|]\}$. Per tant, $S - \{\mathbb{E}[|S|]\} \in C_n$. I és clar que $F(S - \{\mathbb{E}[|S|]\}) = S$.

En definitiva, hem comprovat que el cardinal de B_n, $|B_n|$, és igual al cardinal de C_n, $|C_n|$, més n. Així $T_n = |A_n| = |B_n| + |C_n| = 2|C_n| + n$. Equivalentment, $T_n - n = 2|C_n|$.

A167. (Proposat per José-Luis Díaz Barrero, UPC, Barcelona.)

Siguin a, b, c tres nombres reals positius tals que $abc = a + b + c + 2$, demostreu que

$$\frac{2}{9} + \sqrt[3]{\frac{a+b+c+2}{(1+a)(1+b)(1+c)}} \leq \frac{1}{9}\,(abc).$$

Per quins valors de a, b, c es dona amb igualtat?

Solució: (Solució de Pere Martínez, l'Hospitalet de Llobregat.)

De la relació $a + b + c + 2 - abc = 0$ en deduïm

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 1.$$

En efecte: desenvolupant aquesta suma obtenim que és igual a

$$\frac{a+b+c+2-abc}{(1+a)(1+b)(1+c)} = 0.$$

Aplicant ara la desigualtat de Cauchy-Schwartz als vectors $\vec{\mathbf{u}} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+a}}, \frac{1}{\sqrt{1+b}}, \frac{1}{\sqrt{1+c}}\right)$ i $\vec{\mathbf{v}} = (\sqrt{b}, \sqrt{c}, \sqrt{a})$, en resulta que

$$\sqrt{\frac{b}{1+a}} + \sqrt{\frac{c}{1+b}} + \sqrt{\frac{a}{1+c}}$$

és menor que

$$\sqrt{\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}} \cdot \sqrt{a+b+c},$$

que és igual a $\sqrt{a+b+c}$. Tenint en compte ara la desigualat aritmetico geomètrica i la restricció donada, es té que

$$\sqrt{\frac{b}{1+a}} + \sqrt{\frac{c}{1+b}} + \sqrt{\frac{a}{1+c}}$$

és més gran o igual que

$$3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{b}{1+a}} \cdot \sqrt{\frac{c}{1+b}} \cdot \sqrt{\frac{a}{1+c}}}$$

i que, simplificant, és igual a

$$3\sqrt[6]{\tfrac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}} = 3\sqrt[6]{\tfrac{a+b+c+2}{(1+a)(1+b)(1+c)}}.$$

Combinant tot l'anterior, obtenim que

$$\sqrt[6]{\frac{a+b+c+2}{(1+a)(1+b)(1+c)}} \leq \frac{1}{3}\sqrt{a+b+c}.$$

Finalment, elevant ara aquesta expressió al quadrat concloem que

$$\sqrt[3]{\tfrac{a+b+c+2}{(1+a)(1+b)(1+c)}} \leq \frac{1}{9}\,(a+b+c) = \frac{1}{9}(abc-2)$$

I ja hem acabat. L'igualtat només es dona quan Cauchy-Schwartz i la desigualtat aritmetico geomètrica són certes, que es quan $a = b = c$. A més a més, en aquesta situació, necessàriament han de ser iguals a 2, d'on deduïm l'únic cas on hi ha igualtat.

A168. (Proposat per Joaquim Nadal Vidal. Llagostera, Girona.)

En el triangle $\triangle ABC$, sigui L el peu de la bisectriu interior de C. Sigui $AL = m$, $LB = n$, $CL = l$. Denotem per a (resp. b, c) la longitud del costats del triangle oposat al vèrtex A (resp. B, C). Demostreu que

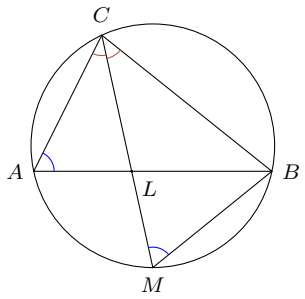
$$l = \sqrt{ab - mn}.$$

Solució: (Solució de Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)

Si M és el punt d'intersecció de la semirecta CL amb la circumferència circumscrita a $\triangle ABC$, llavors els triangles CAL i CMB són semblants (tenen dos angles iguals: un per definició de bisectriu, l'altre, pel fet de ser angles inscrits que comprenen el mateix arc BC de l'esmentada circumferència).

En resulta que $\dfrac{CL}{BC} = \dfrac{CA}{CM}$, d'on deduïm que $BC \cdot CA = CL \cdot CM$, i aquest últim és igual a

$$CL \cdot CM = CL\,(CL + LM) = CL^2 + CL \cdot LM. \tag{2}$$



D'altra banda, atès que els punts A, M, B, C són concíclics, es té: $CL \cdot LM = AL \cdot LB$.

Substituint a (2), ens queda:

$$BC \cdot CA = CL^2 + AL \cdot LB.$$

És a dir, tenim $CL^2 = BC \cdot CA - AL \cdot LB$, que és equivalent a la igualtat desitjada.

Matemots

Xavier Gràcia
Universitat Politècnica de Catalunya

Recordeu que aquesta secció és un joc de llengua (vegeu-ne l'article introductori al núm. 33 de la *SCM/Notícies*). Cal resoldre els enigmes lingüístics següents, a partir de la definició donada i les pistes incloses. Exemple: «Guarint-te mentre comptes els dies d'aïllament (8 lletres i guionet)». La resposta és *curant-te*, que en algun dels nostres dialectes sona igual que *quaranta*, el nombre tradicional de dies que requereix una quarantena.

Potser vau poder observar que tots els enigmes del darrer lliurament estaven dedicats a la salut en aquest temps de pandèmia. Aquesta vegada retornem a la "vella normalitat" d'enigmes de tota mena.

Com sempre, en cas de dubte podeu trobar-ne les respostes al peu de pàgina.[12]

1. El polígon que portem al maleter del cotxe (8 lletres)
2. Arranjades segons el valor de la y (9 lletres)
3. Angle amb què observem un objecte massís (5 lletres)
4. S'han posat d'acord per canviar la part imaginària d'aquest nombre complex (8 lletres)
5. Engarjolat per haver segrestat un topòleg (6 lletres)
6. Pot ser simple i doble en geometria, pura i pràctica en Kant (menys de 5 lletres)
7. En tenen l'homologia i la cohomologia, a més del vodka i la ginebra (9 lletres)
8. El functor derivat d'un divorci (menys de 5 lletres)

[12] Respostes als Matemots: 6. ratò; 8. Ext. 2. ordenades; 3. sòlid; 1. triangle; 4. conjugat; 5. tancat; 7. graduació.